

POLITECNICO DI MILANO



MECCANICA DEI FLUIDI

2. STATICA DEI FLUIDI

A cura di: DIEGO BERZI

v1.2

Indice

1	Meccanica dei fluidi in quiete	3
1.1	Pressione	3
1.2	Equazione indefinita della statica dei fluidi	5
1.2.1	Fluidi incomprimibili	6
1.2.2	Fluidi comprimibili	8
1.3	Equazione globale della statica dei fluidi	10
2	Spinte statiche	12
2.1	Spinte su superfici piane	12
2.1.1	Metodo meccanico	12
2.1.2	Metodo geometrico	15
2.2	Spinte su superfici curve	16

1 Meccanica dei fluidi in quiete

1.1 Pressione

Il vettore sforzo $\bar{\phi}_n$ dipende, in generale, dalla posizione e dall'orientamento della superficie infinitesima sulla quale agisce, e può avere orientamento qualsiasi rispetto a quest'ultima (Cap. 1, Par. 2.2). Nel caso di Fluidi Newtoniani, la componente tangenziale alla superficie dello sforzo risulta proporzionale alla derivata della velocità nella direzione normale alla superficie stessa (Cap. 1, Par. 2.3). Se i Fluidi sono in quiete, la velocità e tutte le sue derivate spaziali e temporali sono nulle. Ne risulta che, nel caso di Fluidi Newtoniani in quiete, lo sforzo ha necessariamente solo componente normale alla superficie infinitesima su cui agisce.

Consideriamo ora un volume infinitesimo di fluido in quiete costituito da un tetraedro, detto di Cauchy [2], avente tre facce (dA_x, dA_y, dA_z) orientate come gli assi cartesiani e la quarta faccia dA di orientamento generico con normale $\hat{\mathbf{n}}$ (Fig. 1).

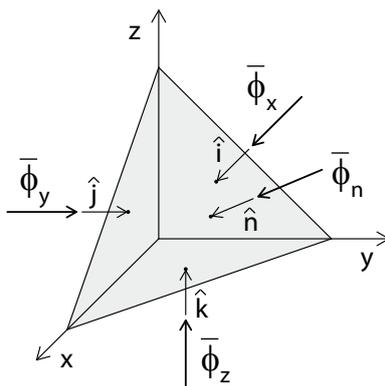


Figura 1: Tetraedro di Cauchy.

Perché questo volume infinitesimo sia in equilibrio, occorre che sia verificata la seconda legge della dinamica (Cap. 1, Par. 2.2), che, in statica, si riduce ad affermare che la somma delle forze esterne di superficie e di volume agenti sul fluido deve essere pari al vettore nullo ($\sum \bar{\mathbf{F}}_s + \sum \bar{\mathbf{F}}_v = \bar{\mathbf{0}}$). Le forze di superficie sono ovviamente quattro, una per ogni faccia, e possono essere espresse come prodotto del vettore sforzo per l'area infinitesima su cui agisce. Per il tetraedro considerato risulta, dunque,

$$\bar{\phi}_x dA_x + \bar{\phi}_y dA_y + \bar{\phi}_z dA_z + \bar{\phi}_n dA + \rho \bar{\mathbf{f}} dW = \bar{\mathbf{0}}, \quad (1)$$

dove $\bar{\mathbf{f}}$ rappresenta la generica forza di volume per unità di massa. Al primo ordine, possiamo trascurare il contributo della forza di volume nella Eq.(1), dal momento che il volume è un infinitesimo di ordine superiore rispetto

alla superficie. Dato che, per un fluido in quiete, l'unica componente di sforzo presente è quella normale alla superficie, ciascun vettore sforzo può essere rappresentato come prodotto della componente scalare del vettore nella direzione del versore normale alla superficie per il versore stesso (ad esempio, $\bar{\phi}_x = \phi_{xx}\hat{\mathbf{i}}$, dove ϕ_{xx} è la componente scalare in direzione x di $\bar{\phi}_x$). Si può, allora, scrivere:

$$\phi_{xx}\hat{\mathbf{i}}dA_x + \phi_{yy}\hat{\mathbf{j}}dA_y + \phi_{zz}\hat{\mathbf{k}}dA_z + \phi_{nn}\hat{\mathbf{n}}dA = \bar{\mathbf{0}}. \quad (2)$$

Proiettando in direzione y ,

$$\phi_{yy}dA_y + \phi_{nn}n_ydA = 0, \quad (3)$$

dove n_y è la componente scalare in direzione y del versore $\hat{\mathbf{n}}$, cioè il coseno direttore di $\hat{\mathbf{n}}$ con l'asse y . Dato che $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ sono discordi, l'angolo α compreso tra i due versori è maggiore di 90° . La superficie dA_y può essere ottenuta per via trigonometrica, moltiplicando la superficie dA per il coseno di $180 - \alpha$ (Fig. 2).

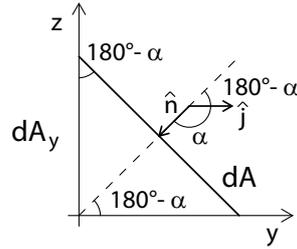


Figura 2: Proiezione del tetraedro di Cauchy sul piano $y - z$.

Ne risulta che

$$dA_y = \cos(180 - \alpha)dA = -\cos \alpha dA = -n_y dA, \quad (4)$$

e l'Eq.(3) si riduce a $\phi_{yy} = \phi_{nn}$. Ripetendo il ragionamento per le direzioni x e z si arriva a dimostrare che

$$\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = \phi_{nn} = p, \quad (5)$$

dove lo scalare p rappresenta la pressione.

Il tetraedro di Cauchy ci fornisce anche un'altra informazione. Sostituendo le relazioni tra le aree nell'Eq.(1), trascurando la forza di volume e dividendo tutto per dA , si ottiene che alla direzione $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}} + n_z\hat{\mathbf{k}}$ è associato il vettore

$$\bar{\phi}_n = n_x\bar{\phi}_x + n_y\bar{\phi}_y + n_z\bar{\phi}_z. \quad (6)$$

L'Eq.(6) indica che i vettori $\bar{\phi}_x$, $\bar{\phi}_y$ e $\bar{\phi}_z$ costituiscono le componenti vettoriali di un campo tensoriale (Cap. 1, Par. 1.1). Si costruisce, dunque, il

tensore degli sforzi $\overline{\overline{\Phi}}$ ponendo, su ciascuna riga, le tre componenti scalari delle componenti vettoriali:

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi sulla diagonale rappresentano le componenti normali degli sforzi, mentre gli elementi rettangolari (extra-diagonali) rappresentano le componenti tangenziali. Il tensore degli sforzi per un fluido in quiete si riduce a una matrice diagonale con tutti gli elementi uguali a p . In forma matriciale, dunque,

$$\overline{\overline{\Phi}} = p\overline{\overline{\mathbf{I}}}, \quad (7)$$

dove $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ è la matrice identità

$$\overline{\overline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando la notazione indiciale, si scrive, semplicemente, $\phi_{ij} = p\delta_{ij}$, con δ_{ij} delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$).

1.2 Equazione indefinita della statica dei fluidi

Prendiamo un volume infinitesimo di fluido in quiete dW , costituito da un parallelepipedo di lati dx , dy e dz , aventi le facce parallele a due a due agli assi del nostro sistema di riferimento cartesiano (Fig. 3). Possiamo scrivere la seconda legge della dinamica come

$$\sum \overline{\mathbf{F}}_s + \rho \overline{\mathbf{f}} dW = \overline{\mathbf{0}}. \quad (8)$$

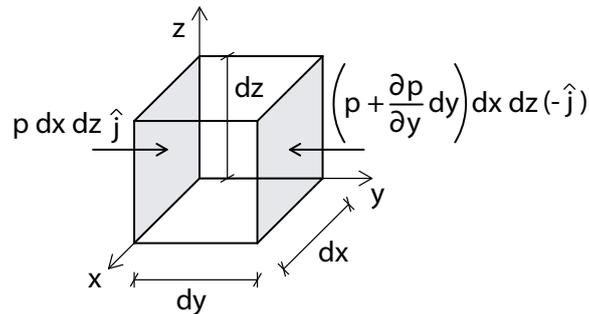


Figura 3: Volumetto di controllo per la determinazione dell'equazione indefinita della statica dei fluidi.

Per esprimere le forze di superficie utilizziamo la nozione di pressione, introdotta nel paragrafo precedente, e la Meccanica del Continuo (Cap. 1,

Par. 2.2). Innanzitutto, distinguiamo le tre facce che hanno per normali i versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ degli assi cartesiani (ricordando che in Meccanica dei Fluidi, per convenzione, il versore normale alla superficie è entrante nel volume) dalle tre facce parallele alle prime, e distanti da queste dx , dy e dz , aventi per normali i versori opposti $-\hat{\mathbf{i}}$, $-\hat{\mathbf{j}}$ e $-\hat{\mathbf{k}}$. Sulle tre facce che hanno come normali $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, lo sforzo ha solo componente normale pari alla pressione p . Sulle tre facce che hanno come normali $-\hat{\mathbf{i}}$, $-\hat{\mathbf{j}}$ e $-\hat{\mathbf{k}}$, la pressione si determina mediante un'espansione in serie di Taylor troncata al primo ordine. Ad esempio, per quanto riguarda la superficie infinitesima che ha per normale $-\hat{\mathbf{i}}$, la pressione è pari a $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$. Moltiplicando la pressione per la superficie e per il versore normale si ottiene il vettore forza che agisce su quella superficie. L'Eq.(8) diventa, dunque,

$$\begin{aligned} p dy dz \hat{\mathbf{i}} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz (-\hat{\mathbf{i}}) + \\ p dx dz \hat{\mathbf{j}} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz (-\hat{\mathbf{j}}) + \\ p dx dy \hat{\mathbf{k}} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy (-\hat{\mathbf{k}}) = -\rho \bar{\mathbf{f}} dW. \end{aligned} \quad (9)$$

Semplificando, con $dW = dxdydz$, l'Eq.(9) risulta

$$\nabla p = \rho \bar{\mathbf{f}}, \quad (10)$$

dove $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_i$. L'Eq.(10) è l'**equazione indefinita che governa la statica dei fluidi**.

Nel caso in cui l'unica forza di volume presente sia la forza peso (**statica dei fluidi pesanti**), la forza di volume per unità di massa risulta $\bar{\mathbf{f}} = -g \nabla \tilde{z}$, dove g è l'accelerazione di gravità e \tilde{z} è la coordinata lungo la verticale geodetica, presa positiva verso l'alto (il gradiente di \tilde{z} non è altro che il versore associato con tale coordinata). L'Eq.(10), quindi, diventa

$$\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z}. \quad (11)$$

Vale la pena notare che la scelta del sistema di riferimento è arbitraria. L'uso di una notazione differente per distinguere la coordinata geodetica dalla coordinata z del nostro sistema di riferimento cartesiano è, dunque, giustificata. A questo punto occorre distinguere i due casi di fluido comprimibile e incomprimibile.

1.2.1 Fluidi incomprimibili

Nel caso di fluido incomprimibile, la densità è costante e può essere portata all'interno dell'operatore gradiente nell'Eq.(11). Ammettendo che anche

l'accelerazione di gravità sia costante, dividendo tutto per $\gamma = \rho g$ e sfruttando la proprietà distributiva del gradiente rispetto alla somma, l'Eq.(11) si riduce a

$$\nabla \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = \bar{\mathbf{0}}, \quad (12)$$

che rappresenta la **Legge di Stevino** [1]. Tale legge dice che la quota piezometrica, data dalla somma della quota geodetica \tilde{z} e dell'altezza piezometrica p/γ , per un fluido pesante incompressibile in quiete è costante,

$$\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} = \tilde{z}_{PCI}. \quad (13)$$

L'Eq.(13) indica che la pressione diminuisce linearmente con la quota geodetica, e che il luogo dei punti a pressione costante (superfici isobare) è costituito da piani orizzontali. Si parla, in questo caso, di distribuzione idrostatica delle pressioni. Il valore della costante \tilde{z}_{PCI} si può determinare se si conosce il valore della pressione in corrispondenza di una determinata quota. La costante \tilde{z}_{PCI} ha, ovviamente, le stesse dimensioni (metri) di \tilde{z} (e p/γ). Si può interpretare \tilde{z}_{PCI} come la quota geodetica del piano orizzontale in corrispondenza del quale le pressioni sono nulle, definito piano dei carichi idrostatici (P.C.I.). La pressione in ogni punto del volume di fluido può essere determinata come

$$p = \gamma h, \quad (14)$$

dove $h = \tilde{z}_{PCI} - \tilde{z}$ è l'affondamento del punto considerato rispetto al piano dei carichi idrostatici.

Nel caso di fluidi con piccolo peso specifico ($\gamma \rightarrow 0$), se le variazioni di quota geodetica non sono troppo elevate, l'Eq.(12) sembra suggerire che sia la pressione, e non la quota piezometrica, a essere costante nel fluido. L'Eq.(13) suggerisce anche che, in questo caso, il piano dei carichi idrostatici si trova all'infinito. Tale argomento non è del tutto corretto, visto che la Legge di Stevino vale solo per fluidi incompressibili, e i fluidi a piccolo peso specifico non possono essere considerati tali (rimandiamo al prossimo paragrafo per una trattazione rigorosa dei fluidi comprimibili). Comunque, nel caso di volumi occupati da gas, la distribuzione di pressione può essere considerata uniforme, se le variazioni di quota geodetica sono piccole (dell'ordine delle decine di metri). Nel caso dell'aria, per esempio, la pressione atmosferica è sostanzialmente una costante. Dal momento che, nella maggior parte delle applicazioni, l'aria è sempre presente, risulta conveniente depurare di tale costante i valori di pressione. Si definisce, allora, pressione relativa p la differenza tra il valore di pressione non depurato (assoluto) p^* e la pressione atmosferica (assoluta) $p_{atm}^* \approx 10^5$ Pa. Si può, dunque, definire un piano dei carichi idrostatici relativo e uno assoluto; quest'ultimo si trova più in alto del primo di una quantità pari a p_{atm}^*/γ . In termini relativi, la pressione atmosferica risulta ovviamente nulla. Questo è particolarmente utile perché,

se un liquido in quiete è direttamente a contatto con l'atmosfera, la quota della superficie di interfaccia (che si chiama superficie libera) coincide con la quota del piano dei carichi idrostatici relativo (si ammette che la pressione sia continua attraverso l'interfaccia).

Per la stragrande maggioranza dei fluidi, gli sforzi normali possono essere solo di compressione, non di trazione. Questo equivale ad affermare che la pressione assoluta non può essere negativa. Risulta, dunque, giustificata la convenzione della Meccanica dei Fluidi di definire il versore normale a una superficie come entrante nel volume (proprio per rappresentare con valori positivi lo scalare pressione assoluta). In termini relativi, invece, la pressione può essere positiva o negativa (depressione). In ogni caso, dalla definizione di pressione relativa, deve necessariamente valere $p \geq -p_{atm}^*$. Quest'ultimo rappresenta un vincolo fisico sui valori di pressione relativa di cui occorre tenere conto in talune situazioni.

1.2.2 Fluidi comprimibili

Nel caso di fluidi comprimibili la densità non è costante. Per questo motivo, l'Eq.(11) da sola non è sufficiente per determinare la distribuzione di pressione all'interno del fluido. Ad essa va affiancata la legge che lega la densità alla pressione e alla temperatura, detta **Equazione di stato**. Tale equazione è una caratteristica del fluido in esame. Se il fluido è un gas, una buona approssimazione è l'equazione di stato dei gas perfetti [3], che può essere scritta come:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_{mol}}, \quad (15)$$

dove $R \simeq 8.31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ è la costante universale dei gas perfetti, T è la temperatura e M_{mol} è la massa molare. Se ricaviamo la densità dall'Eq.(15) e la sostituiamo nell'Eq.(11),

$$\frac{\nabla p}{p} = \nabla \ln p = -\frac{gM_{mol}}{RT} \nabla \tilde{z}. \quad (16)$$

L'Eq.(16) può essere facilmente integrata se ipotizziamo che il fluido sia isoterma (a temperatura costante), e risulta

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{gM_{mol}}{RT} (\tilde{z} - \tilde{z}_0) \right], \quad (17)$$

dove p_0 è la pressione (nota) alla quota \tilde{z}_0 di riferimento. La pressione diminuisce, dunque, esponenzialmente con la quota geodetica, e non linearmente come nel caso dei fluidi incomprimibili.

Se per comodità sostituiamo $\psi = p/p_0$ e $\xi = \tilde{z}gM_{mol}/(RT)$, l'Eq.(17) diventa semplicemente:

$$\psi = \exp(\xi_0 - \xi). \quad (18)$$

Espandendo in serie di Taylor nei dintorni di ξ_0 ,

$$\psi = 1 + \left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} \Delta \xi + \mathcal{O}(\Delta \xi^2), \quad (19)$$

dove abbiamo usato la condizione $\psi_0 = 1$ e $\Delta \xi = \xi - \xi_0$. Usando l'Eq.(18) nell'Eq.(19) otteniamo

$$\psi = 1 - \Delta \xi + \mathcal{O}(\Delta \xi^2). \quad (20)$$

Risostituendo le espressioni di ψ e ξ , ed omettendo i termini di ordine $\Delta \xi^2$,

$$p \approx p_0 - \frac{p_0 M_{mol}}{RT} g(\tilde{z} - \tilde{z}_0), \quad (21)$$

che con l'Eq.(15) si riduce a

$$p \approx p_0 - \rho_0 g(\tilde{z} - \tilde{z}_0), \quad (22)$$

cioè alla Legge di Stevino. La Legge di Stevino è, dunque, una buona approssimazione anche nel caso dei gas perfetti, a patto che i termini di ordine $\Delta \xi^2$ nell'Eq.(20) siano effettivamente trascurabili. Visto che nell'equazione è presente un termine di ordine 1, diciamo che la Legge di Stevino è una buona approssimazione se $\Delta \xi^2$ è al massimo di ordine 10^{-2} . Questo significa che $\Delta \xi$ deve essere al massimo di ordine 10^{-1} . Sostituendo l'espressione di $\Delta \xi$, otteniamo un vincolo sulla variazione di quota

$$\tilde{z} - \tilde{z}_0 < \frac{10^{-1} RT}{g M_{mol}}. \quad (23)$$

Per l'atmosfera terrestre a temperatura ambiente ($M_{mol} \approx 30$ g/mol, $T = 300$ K e $g = 9.81$ m/s²), la massima variazione di quota risulta pari a circa 1000 m. Per variazioni di quota geodetica maggiori di questa, la Legge di Stevino non è più una buona approssimazione e si deve ricorrere all'Eq.(17). Vale la pena notare che per variazioni di quota dell'ordine dei 10 m (dimensioni massime dei serbatoi artificiali), il termine $\Delta \xi$ nell'Eq.(20) risulta di ordine 10^{-3} , e, quindi, anch'esso trascurabile. In questo caso, l'Eq.(22) diventa, semplicemente,

$$p \approx p_0, \quad (24)$$

cioè la pressione del gas può essere considerata praticamente costante (distribuzione uniforme delle pressioni).

Un'ultima osservazione riguarda la variazione di densità con la quota geodetica. Usando l'Eq.(15) nell'Eq.(17), otteniamo

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{g M_{mol}}{RT} (\tilde{z} - \tilde{z}_0) \right]. \quad (25)$$

Dal momento che la densità di un gas è pari alla massa m di una molecola moltiplicata per il numero n di molecole per unità di volume, l'Eq.(25) è equivalente a

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{gM_{mol}}{RT} (\tilde{z} - \tilde{z}_0) \right]. \quad (26)$$

Questo significa che il numero di molecole diminuisce esponenzialmente con la quota geodetica, e tale diminuzione è tanto più sostenuta quanto maggiore è la massa molare del gas, a parità di temperatura. Questo spiega perché negli strati più esterni dell'atmosfera terrestre sono presenti gas leggeri come l'idrogeno e l'elio ($M_{mol} = 2$ g/mol e 4 g/mol rispettivamente) e non l'ossigeno ($M_{mol} = 32$ g/mol).

1.3 Equazione globale della statica dei fluidi

Abbiamo visto come l'Eq.(11) possa essere utilizzata per ottenere la distribuzione di pressione all'interno di un volume di fluido pesante in quiete. Da un punto di vista pratico, la conoscenza della pressione in un determinato punto ha valore limitato, mentre è più utile determinare la forza finita che un fluido in quiete esercita su una certa superficie, finita anch'essa, con cui è a contatto.

Il tipico procedimento per passare da quantità infinitesime a quantità finite è quello di integrare le equazioni indefinite su di un volume finito W (detto volume di controllo) di fluido. Nel caso di fluidi in quiete, dunque, integrando l'Eq.(10),

$$\int_W \nabla p dW = \int_W \rho \bar{\mathbf{f}} dW. \quad (27)$$

Il termine a destra dell'Eq.(27), nel tipico caso in cui la forza di volume sia la forza peso ($\bar{\mathbf{f}} = -g\nabla\tilde{z}$), si può scrivere come

$$\bar{\mathbf{G}} = - \int_W \rho g \nabla \tilde{z} dW = - \left(\int_W \rho dW \right) g \nabla \tilde{z}, \quad (28)$$

e rappresenta il peso del fluido contenuto nel volume di controllo. Il termine a sinistra dell'Eq.(27) può essere convenientemente riscritto utilizzando il teorema del gradiente:

$$\int_W \nabla p dW = \int_W \frac{\partial p}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_i dW = - \int_A p n_i \hat{\mathbf{i}}_i dA = - \int_A p \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (29)$$

dove A è la superficie di contorno del volume di controllo W . Si può allora definire

$$\bar{\Pi}_p = \int_A p \hat{\mathbf{n}} dA \quad (30)$$

come la risultante delle pressioni sulla superficie A (forza che dall'esterno viene esercitata sul contorno del volume di fluido), e riscrivere l'Eq.(27),

semplicemente, come

$$\overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{\Pi}}_p = \overline{\mathbf{0}}, \quad (31)$$

che rappresenta **l'equazione globale della statica dei fluidi pesanti**.

2 Spinte statiche

I problemi connessi con i fluidi in quiete si riducono alla determinazione della forza che i fluidi esercitano su una superficie, solitamente, ma non necessariamente, di separazione con un corpo solido. La forza che i fluidi esercitano sulla superficie è uguale ed opposta alla forza che la superficie esercita sui fluidi. Abbiamo visto che tale forza dipende dalla distribuzione delle pressioni sulla superficie e dalla geometria della superficie stessa (Eq.30). Conviene distinguere, a questo punto, tra superfici piane e superfici curve (dette anche superfici gobbe).

2.1 Spinte su superfici piane

2.1.1 Metodo meccanico

Si consideri la superficie piana generica di area A , che giace su un piano inclinato di un angolo α rispetto al piano dei carichi idrostatici P.C.I. di un fluido pesante incompressibile in quiete, come rappresentato in Fig. 4. Definiamo retta di sponda (R.D.S.) l'intersezione tra il P.C.I. e il piano su cui giace la superficie. Fissiamo un sistema di riferimento in cui l'asse Y coincide con la R.D.S. e l'asse X giace sul piano contenente A ed è ortogonale a Y .

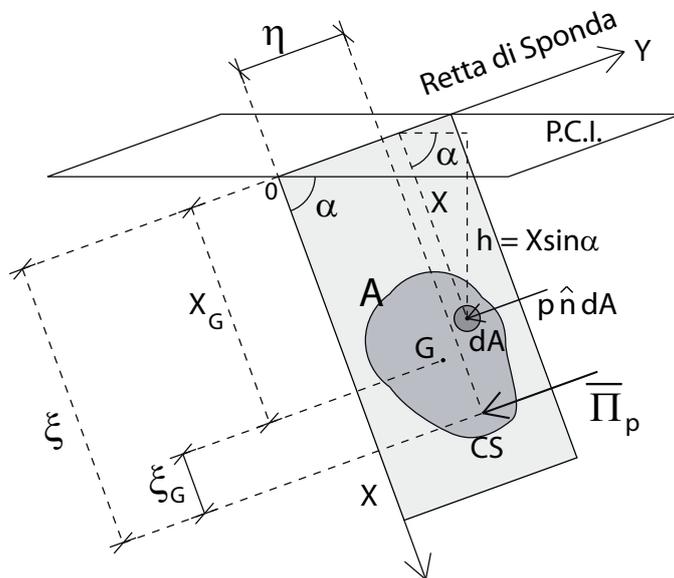


Figura 4: Spinta su superficie piana generica.

La forza esercitata dalla superficie sul fluido è data dall'Eq.(30). Nel caso di superfici piane, $\hat{\mathbf{n}}$, che rappresenta il versore della superficie infinitesima

dA , è costante, per cui

$$\bar{\Pi}_p = \left(\int_A p dA \right) \hat{\mathbf{n}}. \quad (32)$$

La pressione si calcola dall'Eq.(14), noto l'affondamento h . Con riferimento alla Fig. 4, risulta

$$h = X \sin \alpha, \quad (33)$$

per cui l'Eq.(32) diventa

$$\bar{\Pi}_p = \gamma \left(\int_A X dA \right) \sin \alpha \hat{\mathbf{n}}. \quad (34)$$

Per definizione, $X_G A = \int_A X dA$, dove X_G è la coordinata X del baricentro della superficie A . Dunque, visto che $h_G = X_G \sin \alpha$ è l'affondamento del baricentro rispetto al P.C.I.,

$$\bar{\Pi}_p = \gamma h_G A \hat{\mathbf{n}} = p_G A \hat{\mathbf{n}}, \quad (35)$$

dove p_G è la pressione del fluido in corrispondenza del baricentro della superficie. La spinta $\bar{\mathbf{S}}$ che il fluido esercita sulla superficie, è uguale ed opposta alla forza $\bar{\Pi}_p$ che la superficie trasmette al fluido:

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\Pi}_p = -p_G A \hat{\mathbf{n}}. \quad (36)$$

Essa è ortogonale alla superficie piana, e ha modulo pari al modulo della pressione nel baricentro moltiplicato per la superficie:

$$|\bar{\mathbf{S}}| = |p_G| A. \quad (37)$$

Il verso della spinta dipende dal segno della pressione nel baricentro. Se p_G è positivo, la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ è discorde col versore $\hat{\mathbf{n}}$ (il fluido 'spinge' la superficie). Se p_G è negativo, la spinta è concorde con il versore $\hat{\mathbf{n}}$ (il fluido 'tira' la superficie). Queste considerazioni valgono solo nel caso in cui le pressioni sono relative. Se utilizziamo pressioni assolute, il fluido non può che 'spingere' la superficie, così che la spinta assoluta risulta sempre discorde col versore $\hat{\mathbf{n}}$.

La retta di applicazione di $\bar{\mathbf{S}}$ coincide con quella di $\bar{\Pi}_p$. Per determinarla dobbiamo garantire che la somma dei momenti infinitesimi generati dalle forze infinitesime $p \hat{\mathbf{n}} dA$ rispetto a una retta sia uguale al momento generato dalla risultante $\bar{\Pi}_p$ rispetto alla stessa retta. Definiamo il centro di spinta (C.S.) come il punto di intersezione tra la retta di applicazione di $\bar{\Pi}_p$ (normale alla superficie) e il piano contenente la superficie A . Sia ξ la coordinata X del C.S. (distanza del centro di spinta dalla retta di sponda) e η la coordinata Y . Il momento di $\bar{\Pi}_p$ rispetto all'asse Y , pari alla componente di $\bar{\Pi}_p$ nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$ moltiplicato per la distanza del C.S. dalla

R.D.S., deve essere uguale alla somma dei momenti delle forze infinitesime rispetto alla R.D.S.:

$$(\overline{\mathbf{\Pi}}_p \cdot \hat{\mathbf{n}}) \xi = \left(\int_A pX dA \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (38)$$

dove la X all'interno dell'integrale rappresenta il braccio della forza infinitesima rispetto alla R.D.S.. Usando l'Eq.(33) e l'Eq.(35), visto che $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$, l'Eq.(38) diventa

$$\gamma X_G \sin \alpha A \xi = \gamma \left(\int_A X^2 dA \right) \sin \alpha, \quad (39)$$

da cui si può ricavare ξ come

$$\xi = \frac{I}{M}, \quad (40)$$

con $I = \int_A X^2 dA$ momento d'inerzia della superficie A rispetto alla R.D.S. e $M = X_G A$ momento statico della superficie A rispetto alla R.D.S..

Per determinare la coordinata η , procediamo allo stesso modo, ma calcolando i momenti rispetto all'asse X . Si ottiene,

$$(\overline{\mathbf{\Pi}}_p \cdot \hat{\mathbf{n}}) \eta = \left(\int_A pY dA \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (41)$$

da cui

$$\eta = \frac{I_{XY}}{M}, \quad (42)$$

dove $I_{XY} = \int_A XY dA$ è il momento centrifugo della superficie A rispetto agli assi X e Y . Se la superficie A è dotata di un asse di simmetria parallelo all'asse X , il momento centrifugo rispetto ad esso e alla R.D.S. è nullo. Il C.S. appartiene, dunque, a tale asse di simmetria. Una rappresentazione più comoda dell'Eq.(40) può essere ottenuta notando che

$$\int_A (X - X_G)^2 dA = \int_A X^2 dA + \int_A X_G^2 dA - 2 \int_A X X_G dA. \quad (43)$$

Dal momento che X_G non varia in A , la si può portare fuori dagli integrali e ottenere:

$$\int_A (X - X_G)^2 dA = \int_A X^2 dA + X_G^2 A - 2X_G^2 A = \int_A X^2 dA - X_G^2 A. \quad (44)$$

Il primo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(44) rappresenta il momento d'inerzia I_G della superficie A rispetto ad un asse baricentrale parallelo alla R.D.S.. Abbiamo appena dimostrato il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli, che, nel caso in esame, si riduce a

$$I = I_G + X_G M. \quad (45)$$

Usando l'Eq.(45) nell'Eq.(40) otteniamo

$$\xi = \frac{I_G}{M} + X_G = \xi_G + X_G. \quad (46)$$

La quantità ξ_G rappresenta la distanza del C.S. dal baricentro della superficie misurata lungo X . Questa rappresentazione è più comoda dell'Eq.(40) perché I_G non dipende dalla posizione del P.C.I., ma solo dalla geometria della superficie (il valore di I_G per le geometrie più comuni è tabellato). Dal momento che I_G è una quantità positiva e M ha lo stesso segno di X_G , l'Eq.(46) indica che il C.S. si trova sempre più lontano del baricentro dalla R.D.S..

I risultati ottenuti in questo paragrafo sono validi anche nel caso in cui la superficie sia a contatto con un fluido di piccolo peso specifico. In questo caso, l'analisi si semplifica, perché la pressione può essere considerata distribuita in maniera uniforme: la R.D.S. si trova all'infinito (o a meno infinito se la pressione è negativa), per cui anche il momento statico M è una quantità infinita e il C.S. coincide col baricentro della superficie ($\xi = X_G$ dall'Eq.46).

2.1.2 Metodo geometrico

Esiste un metodo semplice per la determinazione della spinta su una superficie piana che si basa su concetti di natura geometrica.

Notiamo che l'integrale nell'Eq.(32) rappresenta il volume $W_p = \int_A p dA$ di un solido (detto **solido delle pressioni**) che si costruisce riportando, perpendicolarmente alla superficie A , segmenti di lunghezza p in corrispondenza di ogni elemento infinitesimo dA : il volume del solido delle pressioni ha come dimensioni quelle di una forza, e si deve ammettere che possa avere valori negativi qualora il fluido sia in depressione. La spinta sulla superficie piana A si calcola, allora, come

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\Pi}_p = -W_p \hat{\mathbf{n}}. \quad (47)$$

Il solido delle pressioni è un caso particolare di cilindroide, volume compreso tra una superficie piana di base perpendicolare alle generatrici e una superficie piana inclinata rispetto alle generatrici. Il volume W_p si calcola facilmente come altezza in corrispondenza del baricentro della superficie di base moltiplicata per la superficie stessa, i.e.,

$$W_p = p_G A, \quad (48)$$

in accordo con l'Eq.(36).

Anche il centro di spinta (e, di conseguenza, la retta di applicazione) può essere facilmente determinato attraverso il metodo geometrico. Se indichiamo come $p dA = dW_p$ l'elemento infinitesimo del volume del solido delle

pressioni, e usiamo l'Eq.(47), le Eqs. (38) e (41) possono essere riscritte come

$$\xi = \frac{\int_{W_p} X dW_p}{W_p}, \quad (49)$$

e

$$\eta = \frac{\int_{W_p} Y dW_p}{W_p}. \quad (50)$$

Le coordinate del centro di spinta corrispondono, dunque, per definizione, alle coordinate del **baricentro del solido delle pressioni**.

2.2 Spinte su superfici curve

Nel caso in cui si voglia determinare la spinta che il fluido esercita su una superficie curva, la trattazione del paragrafo precedente non è più valida. La ragione sta nel fatto che non esiste un unico versore normale alla superficie curva: $\hat{\mathbf{n}}$ non può essere considerato costante e, quindi, tirato fuori dall'integrale nell'Eq.(30).

Data la superficie curva A_0 a contatto col fluido o con più fluidi stratificati, per i quali la distribuzione delle pressioni sia continua, si individua un volume di controllo W con i seguenti criteri:

- la superficie A_0 deve essere parte del contorno del volume W (può coincidere con l'intera superficie di contorno del volume);
- il resto del contorno (se esiste) deve essere costituito da superfici piane;
- il volume di controllo deve essere riempito con i fluidi, in modo che la superficie A_0 sia a contatto con gli stessi fluidi con cui è a contatto nella realtà;
- i fluidi nel volume di controllo devono avere la stessa distribuzione di pressioni che hanno nella realtà;
- le superfici di separazione tra fluidi diversi devono essere orizzontali.

Il volume di controllo deve essere in equilibrio, per cui deve valere l'equazione globale della statica (Eq.31). La risultante delle pressioni agenti sulla superficie di contorno di W , $\bar{\mathbf{\Pi}}_p$, può anche essere scritta come

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_p = \bar{\mathbf{\Pi}}_0 + \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{\Pi}}_i, \quad (51)$$

dove $\bar{\mathbf{\Pi}}_0$ è la risultante delle pressioni su A_0 , mentre $\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{\Pi}}_i$ è la somma delle risultanti delle pressioni sulle restanti n superfici piane che costituiscono il contorno del volume di controllo. Sostituendo nell'Eq.(31), risulta

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0 = -\bar{\mathbf{G}} - \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{\Pi}}_i. \quad (52)$$

Il problema del calcolo della spinta su una superficie curva è stato trasformato, dunque, nel calcolo di una forza peso e di n spinte su superfici piane (determinate come spiegato nel paragrafo precedente). La spinta $\bar{\mathbf{S}}$ cercata può essere uguale a $+\bar{\mathbf{\Pi}}_0$ o a $-\bar{\mathbf{\Pi}}_0$, in funzione del volume di controllo scelto (si veda a questo proposito la dispensa sugli **Esercizi di Statica dei Fluidi**).

Riferimenti bibliografici

- [1] Stevin, S., *De Beghinselen der Weeghconst* (1586).
- [2] Cauchy, A.-L., *De la pression ou tension dans un corps solide*, Exercices de Mathématiques **2**, 42 (1827).
- [3] Clapeyron, E., *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur*, Journal de l'École Polytechnique XIV, 153-190 (1834).